Πληρότητα Διανυσματικού Χώρου

• Είναι γνωστό ότι οποιοσδήποτε N-διάστατος δ.χ. που ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών είναι πλήρης.

• Έστω μια βασική ακολουθία διανυσμάτων $\{|f_n>\}_{n=1,2,\dots}$

Αφού ο χώρος είναι N-διάστατος, αν $\{|e_i>\}_{i=1,2,\dots,n}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του χώρου θα ισχύει ότι:

$$|f_n> = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(n)} |e_i>.$$

Αφού η $|f_n>$ είναι βασική ακολουθία θα ισχύει ότι:

$$\rho^2 (|f_n>, |f_m>) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0, \text{ αλλά,}$$

$$\rho^2(|f_n>,|f_m>) = (<f_n| - <f_m|)(|f_n> - |f_m>) = \sum_{i=1}^{N} |f_i^{(n)} - f_i^{(m)}|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Τότε θα ισχύει ότι $|f_i^{(n)} - f_i^{(m)}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ για δοσμένο i.

• Η ακολουθία (μιγαδικών) αριθμών $\{f_i^{(n)}\}$ είναι μία βασική ακολουθία και συνεπώς συγκλίνει: $\lim_{n\to\infty} f_i^{(n)} = f_i$.

- κατασκευάζω το διάνυσμα: $|f> = \sum_{i=1}^{N} f_i |e_i>$ αυτό είναι ένα διάνυσμα του N-διάστατου χώρου.

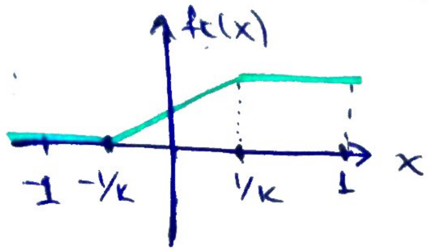
Διαπιστώνουμε ότι: $\rho^2 (|f>, |f_n>) = \sum_{i=1}^{N} |f_i - f_i^{(n)}|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Δηλαδή $\rho^2 (|f>, |f_n>) = 0$ ή $|f_n> \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ισχυρά}} |f>$

Παρατήρηση: Ανάλογο συμπέρασμα δεν ισχύει για τυχόντα απειροδιάστατο χώρο, Hilbert, όπως φαίνεται στο παράδειγμα:

π.χ.

Έστω το διάστημα $[-1,1]$, $w(x)=1$ και η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. $f_k(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{k} < x \le 1 \\ \frac{kx+1}{2}, & -\frac{1}{k} < x \le \frac{1}{k} \\ 0, & -1 \le x \le -\frac{1}{k} \end{cases}$



Αποδεικνύεται ότι: $\rho(|f_k\rangle, |f_l\rangle) = 0 \Rightarrow$
$\int_{-1}^{1} |f_k(x) - f_l(x)|^2 dx \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$.

Δηλαδή, η $|f_k\rangle$ είναι μία ακολουθία διανυσμάτων που συγκλίνει στη μέση τιμή.

Το όριο όμως δεν μπορεί να είναι μία συνεχής συνάρτηση.

• Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$

Τότε : $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 |f(x) - f_k(x)|^2 dx = 0$.

Δηλαδή, για $x \in [0,1]$ η $f_k(x)$ συγκλίνει στη μέση τιμή.

Ομοίως για $x \in [-1,0]$. Θεωρούμε την $f(x) = 0$, $\lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{0} |f(x) - f_k(x)|^2 dx = 0$

Δηλαδή, για $x \in [-1,0]$ η $f_k(x)$ συγκλίνει στη μέση τιμή.

Όμως το όριο δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο, άρα δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [-1,1]$ η οποία να συμπίπτει με τα παραπάνω όρια.

Συμπέρασμα :

Άρα το όριο της $f_k(x)$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο 0, άρα ο χώρος δεν είναι πλήρης.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω για πλήρεις χώρους, διατυπώνουμε το εξής:

Θεώρημα: Έστω ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ σε ένα χώρο, H, που είναι πλήρης. Τότε η ακολουθία των διανυσμ.

$$|S_n\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i | f \rangle |e_i\rangle, \quad |f\rangle \in H, \quad \langle f | f \rangle < \infty .$$

έχει ως όριο το διάνυσμα $|f\rangle$ με την έννοια: $\lim_{n\to\infty} \rho(|f\rangle, |S_n\rangle) = 0$.

Δηλ. το θεώρημα λέει ότι μπορούμε να γράψουμε: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x)$ όπου $f_i = \langle e_i | f \rangle$, θα πρέπει να πληρούνται οι εξής συνθήκες:

1) Τα $e_i(x)$ $i=1,2,\dots$ να αποτελούν βάση, δηλ. να είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα.!

2) $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 = \langle f | f \rangle = \|f\| < \infty$. !

3) Ο χώρος H να είναι πλήρης.

Τότε οι συντελεστές f_i, λέγονται συντελεστές Fourier και ισχύει η σχέση του Parseval: $\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2 = \langle f|f\rangle < \infty$.

Παρατήρηση: Ο συναρτησιακός χώρος, F, (ο χώρος των συνεχών συναρτ.) ΔΕΝ είναι πλήρης!

- Θα πρέπει να συμπληρωθεί έτσι ώστε να περιέχει ασυνεχείς συναρτήσεις που έχουν πεπερασμένο αριθμό αλμάτων. (όπως π.χ. πολυώνυμα, η οποία εφαρμόζεται σε συναρτήσεις με πεπερασμένο σημείο ασυνέχειας).
- Ένας τέτοιος χώρος είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλ. $f(x)$ τ.ω.

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx < \infty \quad (*).$$

Ο χώρος αυτός συμβολίζεται $L^2_w(a,b)$.

Τότε ισχύει το θεώρημα: (χωρίς απόδ.)

Θεώρημα: (Riesz - Fischer)

Ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, $f(x)$ δηλ. των συναρτήσεων που ικανοποιούν την (*) είναι πλήρης.

Παρατήρηση: Το θεώρημα εξασφαλίζει ότι η $\sum_{i=1}^{\infty}\langle e_i|f\rangle|e_i\rangle$ συγκλίνει στη μέση τιμή που είναι η συνάρτηση $f(x)$ που ανήκει στο χώρο.

Είδη Συγκλίσεων:

Σε πολλά προβλήματα μας δίνεται ένας χώρος συναρτήσεων και ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$, σ'αυτόν το χώρο είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε μία συνάρτηση $f(x)$ του χώρου με ένα πεπερασμένο άθροισμα,

$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i e_i(x)$, να πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στην $f(x)$, δηλ. στη μέση τιμή, με την έννοια: $\lim_{n\to\infty}\rho(f(x), S_n(x)) = 0$ ή $\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 w(x)\,dx = 0$

χωρίς όμως να μας ενδιαφέρει αν η $S_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα όρο στην $f(x)$.

Αυτό επιτυγχάνεται αν οι συντελεστές F_i, επιλεγούν ως εξής:

$$F_i = \langle e_i|f\rangle = \int_a^b e_i^*(x)\cdot f(x)\cdot w(x)\,dx.$$

Ασθενής σύγκλιση :

Μία άλλη σύγκλιση που χρησιμοποιείται σε γραμμικούς διανυσματικούς χώρους είναι η ασθενής σύγκλιση. Θα λέμε ότι: $|f_n\rangle \xrightarrow[\text{ασθενώς}]{} |f\rangle$, $|f_n\rangle \in H$, $|f\rangle \in H$. αν $\exists\ |g\rangle \in H$ τ.ω. $\lim\limits_{n\to\infty} \langle g|f_n\rangle = \langle g|f\rangle$.

Άλλα δύο είδη σύγκλισης :

i) Σύγκλιση σημείου προς σημείο.
ii) Ομαλή σύγκλιση.

Σύγκλιση σημείο προς σημείο :

Θα λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ συγκλίνει σημείο προς σημείο στην $f(x)$, αν για δοσμένο $x \in [a,b]$ και $\forall \varepsilon>0, \exists N_0(x,\varepsilon)>0$ τ.ω. $n > N_0(x,\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ομαλή σύγκλιση :

Η σύγκλιση $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ είναι ομαλή αν

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0(\varepsilon)>0$, τ.ω. $n > N_0(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Μπορούμε να δείξουμε ότι αν η σύγκλιση είναι ομαλή:

α) Το όριο ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Μπορούμε να παραγωγίσουμε σειρά όρο προς όρο δηλ.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x) \Longrightarrow \frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{de_i(x)}{dx}.$$

Παρατήρηση:

1) Η ισχυρή σύγκλιση $\Longrightarrow$ ασθενή σύγκλιση

2) Η ασθενής σύγκλιση $\not\Longrightarrow$ ισχυρή σύγκλιση.

Μ.Φ. 1/11/2016

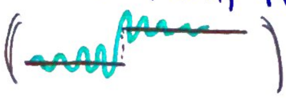
Φαινόμενο Gibbs

Μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά ορθοκ. συναρτήσεων δηλ.

$\sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, $f_i = \langle e_i | f \rangle$.

Οι $e_i(x)$ είναι ομαλές συναρτήσεις και η $f(x)$ μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών με πεπερασμένα άλματα.

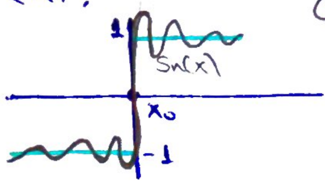
Στα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$, η συνάρτηση:

$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i(x)$. () , δεν μπορεί να προσεγγίσει τη συνάρτηση $f(x)$ όσο μεγάλος και να είναι ο n (n πεπερασμένο).
(πάω να προσεγγίσω το άπειρο με κάτι πεπερασμένο, δε γίνεται).

Αυτό συμβαίνει επειδή αν x_0 είναι το σημείο ασυνέχειας της $f(x)$ τότε η $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ απειρίζεται, και η ποσότητα $\frac{dS_n}{dx} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{de_i(x)}{dx}$ παραμένει πάντα πεπερασμένη.

Συμπέρασμα: Άρα όσο μεγάλο, αλλά πεπερασμένο ~~5~~ να είναι το n η συνάρτηση $\frac{dS_n}{dx}$, δεν μπορεί να προσεγγίσει καλά την κλίση της $f(x)$.

Σχηματικά:



Φαινόμενο Gibbs.

Σειρές Fourier

Εδώ οι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ορίζονται στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ ή $[0,2\pi]$, το ορθοκανονικό σύστημα παίρνει τη μορφή

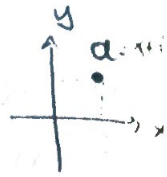
i) $e_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{imx}$, $m \in \mathbb{Z}$, $i^2 = -1$ ή

ii) $c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$, $s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$

και $w(x) = 1$.

Οπότε μια συνάρτηση $f(x,y)$ μπορεί να προσεγγιστεί ομαλά ως:

$$f(x,y) \approx \sum_{l=0}^{\nu} \sum_{n=0}^{\nu} c_{ln}\, x^{l} y^{n}$$



(Παίρνω 2 μεταβλητές γιατί μπορεί να έχω μιγαδικές συναρτήσεις).

Για να ξεφύγω από τα x, y χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) \approx \sum_{l} \sum_{n} c_{ln}\, r^{l+n} \cos^{l}\theta \cdot \sin^{n}\theta, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(r,\theta)\big|_{r=1} \approx \sum_{m=-\nu}^{\nu} g_m \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}}.$$